შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 13	03.05.2014/ მათ/III/ M377

ამოცანა № 1

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2 \cdot a_3} + \dots \frac{a_n^3}{a_n^2+a_1 \cdot a_2} \geq \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{2}$$

აქ დავამტკიცოთ რომ $\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2 \cdot a_3} \geq a_1 - k$ სადაც $k = \frac{a_1+a_2+a_3+\dots a_n}{2n}$

~~[illegible]~~ ვწეროთ და [illegible] [illegible].
ე.ი. რომ

$a_1^2 \cdot k + a_2 \cdot a_3 \cdot k \geq a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$
$a_2^2 \cdot k + a_3 \cdot a_4 k \geq a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$
— —
— —
$a_n^2 k + a_1 \cdot a_2 \cdot k \geq a_n \cdot a_1 \cdot a_2$

$\Rightarrow$ $(a_1^2+a_2^2+\dots a_n^2)k + (a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_4 + \dots + a_{n-1} \cdot a_n) \cdot k \geq a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + \dots + a_n \cdot a_1 \cdot a_2$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

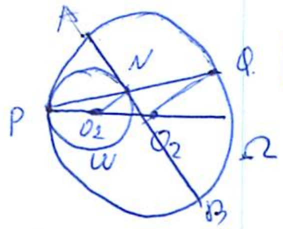
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 13

03.05.2014/ მათ/III/ M377

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



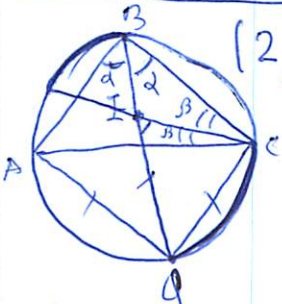
(1) $\angle NPO_1 = \alpha$ მაშინ $PN = 2\cdot r\cdot\cos\alpha$ ხოლო $PQ = 2R\cdot\cos\alpha$

$\triangle PNO_1$ და $\triangle PQO_2$-ში ვხედავთ რომ $\frac{PN}{PQ} = \frac{2r\cdot\cos\alpha}{2R\cos\alpha} = \frac{PO_1}{PO_2}$

ანუ $\triangle PNO_1 \sim \triangle PQO_2$ ანუ $O_1N \parallel QO_2$ და $AB \perp O_1N$

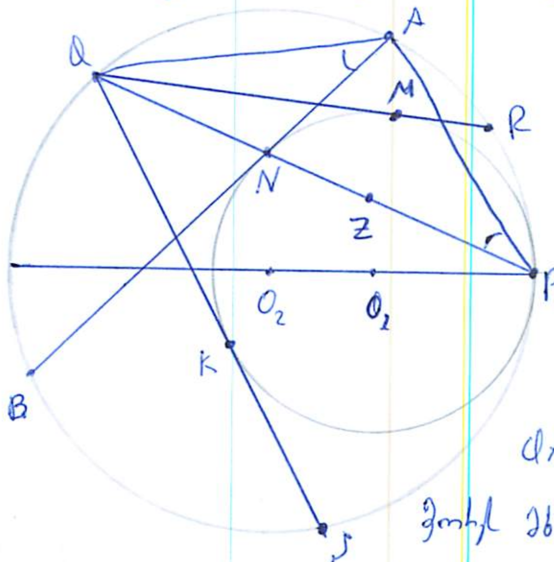
(რადგან მხები) ანუ $QO_2 \perp AB$ რაც იმას ნიშნავს რომ AQ და QB [illegible] ანუ $\triangle PAB$-ში P-დან გამოსული ბისექტრისა

Ω გადაკვეთს Q წერტილში.



(2) თუ ვიპოვით $\triangle ABC$-ზე შემოხაზული წრეწირის და I არის მისი ჩახაზული წრეწირის ცენტრი მაშინ თუ განვიხილავთ $\triangle QIC$ ვნახავთ რომ $\angle ICQ = \alpha+\beta$ ხოლო $\angle CIQ = \alpha+\beta$ ანუ ტოლია და $\triangle QIC$ ტოლფერდაა და $QI = QC = AQ$ (ანალოგიურად)

[illegible]



(1)-დან ვიცით რომ $\overset{\frown}{QA}$ [illegible] $= \overset{\frown}{BQ}$ [illegible]

ანუ ~~[illegible]~~ და (2)-დან $QA = QB = QZ$

$\angle ARB$-ს [illegible] RQ ბისექტრისა ([illegible] AB-ს).

ანუ X [illegible] QR-ზე ~~[illegible]~~ ანალოგიურად

[illegible] QS-ზე. $\angle NPA = \angle QAN$

ანუ აქ შემოხაზული $\triangle NAP$-ზე, წრეწირს

QA მხები იქნება და ვიცით $QA^2 = QN\cdot QP$

მეორეს მხრივ $QM^2 = QN\cdot QP$ ე.ი. $QA = QM$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 13

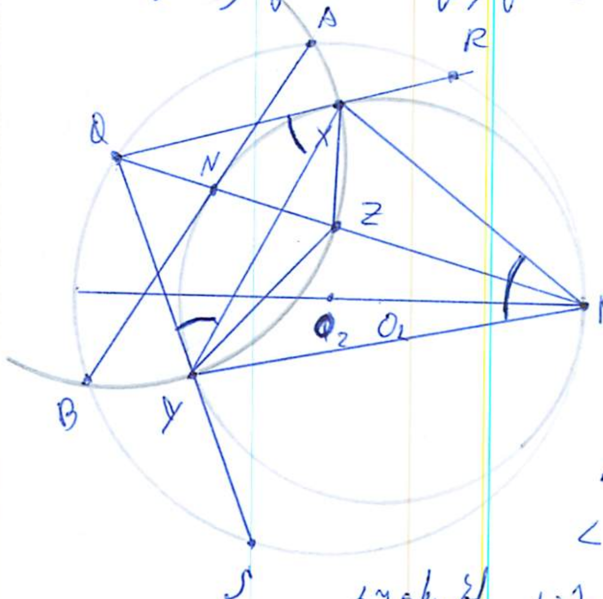
03.05.2014/ მათ/III/ M377

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

რაც იმას ნიშნავს ~~რომ~~ (2)-დან ~~გამომდინარე~~ $\triangle BRA$-ში $QA=QB=QM$, ე.ი. ~~M-ში~~ და RQ ბისექტრისა ~~[illegible]~~ და (2)-დან $QA=QB=QX_1$ რაც ანუ X და M ერთი და იგივე წერტილია ანალოგიურად K და Y-ზეც.

ე.ი. $QA=QB=QZ=QY=QX$ ანუ A, B, Z, X, Y მდებარეობენ ერთ წრეწირზე და მისი ცენტრია Q.



~~$XY \perp QO_2$ იმიტომ რომ XY არის [illegible] წრეწირის საერთო ქორდა [illegible] $QO_2 \perp AB$ ე.ი. $AB \parallel XY$~~

$\angle QXY = \angle XYQ = \angle XPY$

$\Rightarrow \triangle XYP$-ში [illegible] რომ

$\angle YXZ + \angle XYZ + \angle XPY = 90^\circ$ ე.ი.

$\angle ZXP + \angle ZYP = 90^\circ$ რადგან სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180°-ია. [illegible] $QXZY$ [illegible] [illegible] რომ $\angle QXZ + \angle QYZ + \angle YXZ + \angle XYZ = 180^\circ$ [illegible] ვიცით რომ $\angle YXZ + \angle XYZ + \angle XPY = 90^\circ$ და [illegible] [illegible] $QXZY$ და [illegible] [illegible]

[illegible]

$\longrightarrow$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

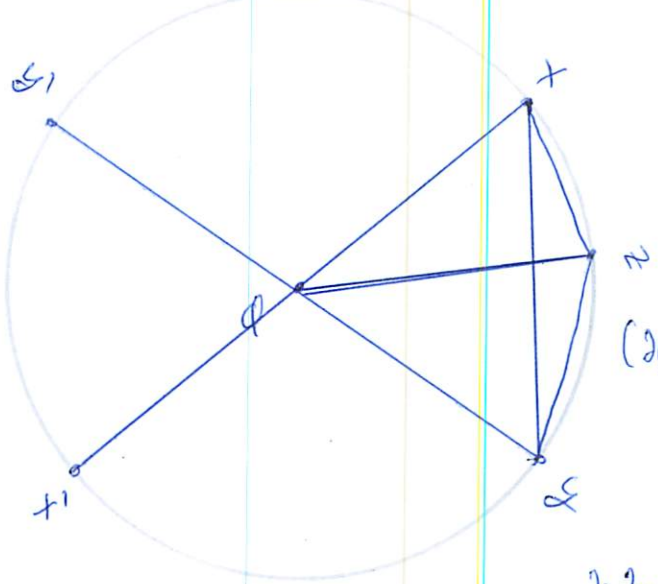
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 13

03.05.2014/ მათ/III/ M377

ამოცანა № 2

გვერდი № 3



Q - ცენტრი ე.ი. $\breve{XZY} = \breve{X'Y'}$ (მართლ.

$\angle QXZ + \angle QYZ = \frac{\breve{Y'XZ}}{2} + \frac{\breve{X'YZ}}{2}$

[illegible] $\frac{\breve{Y'X'}}{2}$ ([illegible])

([illegible]) $\frac{\breve{Y'X'}}{2} + \frac{\breve{Y'XZ}}{2} + \frac{\breve{X'YZ}}{2} = 180^\circ$

[illegible] $\frac{\breve{Y'X'}}{2} = \angle YXZ + \angle XYZ$

მივიღეთ რომ $\angle QXZ + \angle QYZ + \angle YXZ +$
$+ \angle XYZ = 180^\circ$

ანუ $2\angle QXY + 2\angle YXZ + 2\angle XYZ = 180^\circ$

$\angle QXY + \angle YXZ + \angle XYZ = 90$

$\angle XPY + \angle YXZ + \angle XYZ = 90^\circ$ ანუ $\angle ZXP + \angle ZYP = 90^\circ$

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 13

03.05.2014/ მათ/III/ M 3 77

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

ავიღოთ ვთქვათ ყველა სხვაობა რაც არის ამ 2000 რიცხვში

დავალაგოთ ზრდადობით $a_1<a_2<a_3<a_4<\ldots<a_{2000}$ მაშინ მინიმალური

განსხვავება → $a_n-a_{n-1} \le \frac{a_{2000}-a_1}{1999}$

ახლა ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ რომ მოიძებნება ისეთი $\frac{a-b}{c-d}$ რომელიც

[illegible]

$$\frac{99999}{100000}<\frac{a-b}{c-d}<\frac{100001}{100000}$$ ანუ ჩვენ ვიპოვით მინიმალურ

[illegible] 2 სხვაობის [illegible].

ვთქვათ ერთმანეთის სხვაობებია ~~[illegible]~~ X_i და

დავალაგოთ ზრდადობით (სადაც $X_i>0$)

$X_1<X_2<X_3<\ldots<X_m$ ვიცით რომ არ X_i შეიძლება ტოლი,

~~[illegible]~~ [illegible]

$m=\frac{2000\cdot 1999}{2}=1999000$ ახლა ვაჩვენოთ დავამტკიცოთ

რომ $\frac{X_n}{X_{n\pm1}}$ [illegible] (~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ $\frac{X_m}{X_1}\ge 1999$ როგორც ზემოთ ვთქვით

განვიხილოთ $\frac{X_i}{X_{i+1}}=n_k$ და დავალაგოთ ზრდადობით $n_1<n_2<\ldots<n_{m-1}$

სულ $n_{m-1} \geq 1999$